数理解析研究所講究録
637巻 1988年 26-35

Navier–Stokes 方程式の解の安定性

(東大・理) 増田久弥
(Kyûya Masuda)

1、3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の有界な物体の外部 Ω を流れる非圧縮性粘性流は、Navier–Stokes 方程式によって支配される。

$$
(1)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (x\in\Omega,\ t>0) \\
u(x,t) = b(x) \quad (\Omega \text{ の境界 } \Gamma \text{ 上}) \\
u(x,t) \longrightarrow b_\infty \quad (|x|\longrightarrow\infty) \\
u(x,0) = a(x) \quad (x\in\Omega)
\end{cases}
$$

ここで、u は Ω における速度ベクトル場、p は圧力を表わすスカラー場、ν は粘性係数で正定数、$b=b(x)$ は Γ 上に与えられたベクトル場、$a=a(x)$ は Ω 上で与えられた初速度ベクトル場、b_∞ は定数ベクトル。

ただし、$\operatorname{div} u = 0$ の条件より、次の条件を満たすごとく b、a を与えることが自然であろう。

(2) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma} n \cdot b(x)\, dS_x = 0 \\ \mathrm{div}\ a = 0 \end{cases}$$

(nはΓの外向き法線ベクトルを表わす。)

特に、定常流は（便宜上、u, pをv, qで書くと）

(3) $$\begin{cases} -\nu\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla q = 0 \\ \mathrm{div}\ v = 0 \qquad\qquad (x \in \Omega) \\ v(x) = b(x) \quad (x \in \Gamma), \quad v(x) \longrightarrow b_\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (|x| \to \infty) \end{cases}$$

となる。(3)の解、すなわち定常流の安定性が問題である。

2.

これに関係して、R. Finn [1, 2, 3] は、"物理的にもっともな"解 (physically reasonable solution) という概念を導入した。すなわち、(3)の解の中で、

(4) $$|v(x) - b_\infty| \le \frac{\mathrm{const.}}{|x|} \quad (|x| \to \infty)$$

をみたす解をいう。(4)をみたす(3)の解は、必然的に、

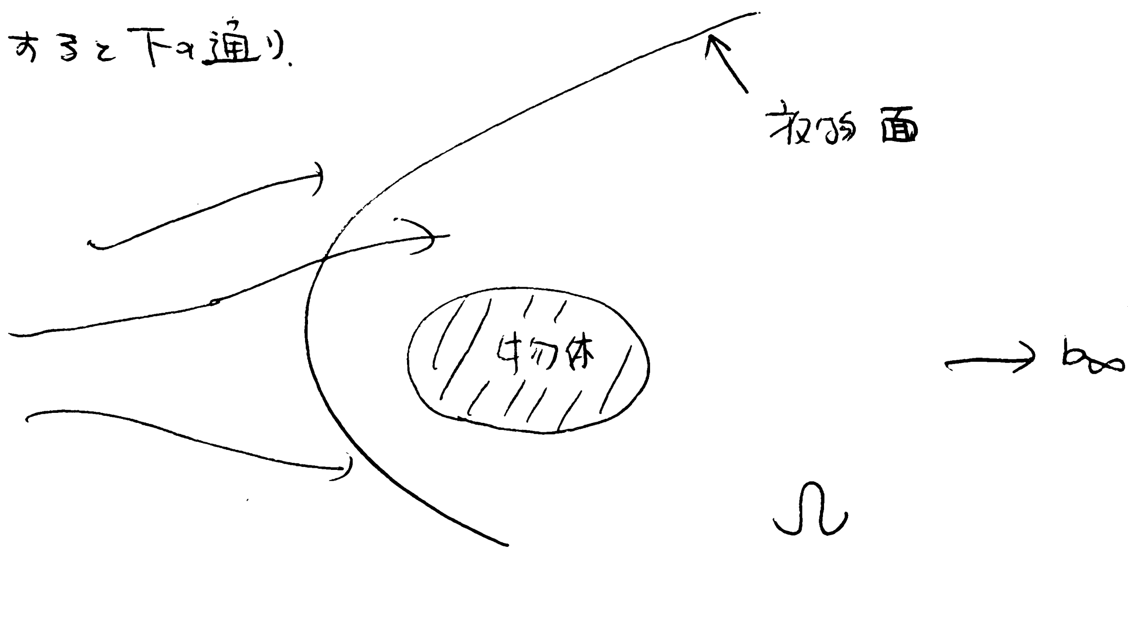
(5) $$v(x) = b_\infty + O\left(\frac{1}{|x|\,(1+s_x)}\right)$$

をみたすことが示される。(上記 Finn の論文をみよ。)

但し、s_x は次で定義される：

(6) $$s_x = |x| - \frac{b_\infty \cdot x}{|b_\infty|}.$$

図示すると下の通り。



放物面の外部の内部では b_∞ に近づく speed が異なることに注意する。すなわち、wake region が存在する。

(4) をみたす解の存在は、K. I. Babenko によって示された。すなわち、それまで有限な Dirichlet norm

$$(7) \qquad \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx < \infty$$

なる解の存在が知られていたが、(7) から (4) がでることを示したのである。([4]).

その後、D. Clark ([5]), Babenko-Vasil'ev ([6]) は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$(8) \qquad \mathrm{rot}\, v(x) = O(|x|^{-2} \exp(-(R-\varepsilon) s_x))$$

を示した。($R = |b_\infty|/2\nu$) paraboloid の外では、rot v は "殆んど" 0 とみなせる。

上にのべたことが、非定常 Navier-Stokes 方程式に対しても成立する。これらの結果は、Mizumachi [7] によって得られた。

3、

2.より，(4)をみたす(3)の解の安定性を論ずるのが，大切となることがわかる。

Masudaは次の結果を得た．([8])．

$$\text{(9)}\qquad \sup_{x\in\Omega}|x|\,|v(x)-b_\infty| < \frac{1}{2}\nu$$

ならば，vに摂動$a'=a'(x)$を与えたとき，

$$\text{(10)}\qquad a' \in L^2(\Omega),\qquad a(x)=v(x)+a'(x)$$

をみたすaを初期値にもつ(1)の解$u=u(x,t)$は，

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} \|\nabla u(\cdot,t)-\nabla v(\cdot)\|_{L^2} &\leq M t^{-1/4} \\ \sup_{x\in\Omega}|u(x,t)-v(x)| &\leq M t^{-1/8} \end{aligned}$$

但し，Mはa'によらぬ正定数である。すなわち，(9)を満たす(3)の解は安定である。($\|\cdot\|_{L^2}$はΩ上のL^2-normを表わす。)

4.

流体のエネルギーは，vのもつエネルギーに近づくであろうか．すなわち

$$\| u(\cdot,t) - v(\cdot) \|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty) \tag{12}$$

Masudaは，これを示した([9])．これ以後，どの位のorderで0にいくか，が多くの数学者により研究されはじめた．文献表に掲げた論文を参照していただきたい．例えば，そのひとつ

P. Secchi, On the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$

を（著者が改良した形で）述べよう．

$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ において

$$(13)\quad \begin{cases} -\nu \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \nabla \cdot v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x| \to \infty} v(x) = 0 & \end{cases}$$

このとき，

<u>定理</u>　次の $R > 0$, $\alpha \geq 3$ が存在するとする；

$$f \in L^{n/2}(|x| < R), \quad \operatorname*{ess.sup}_{|x| \geq R} |x|^{\alpha} |f(x)| < \infty$$

$$R|f|_{L^{\frac{n}{2}}(|x|<R)} + \operatorname*{ess.sup}_{|x| \geq R} |x|^{\alpha} |f(x)| < c_1 \nu^2$$

(C_1; n, α にのみ依存する定数) このとき,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x||v(x)| < \infty, \quad \nabla v \in L^n, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v \in L^{\frac{n}{2}}$$

$$p \in L^n, \quad \nabla p \in L^{n/2}$$

をみたす (13) の解がただひとつ存在する。

非定常 Navier–Stokes 方程式の場合は,

$$(14) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = f(x) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0 & \\ \lim_{|x| \to \infty} u(x,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

を考える. これについて,

<u>定理</u>　$p > n$, $f \in L^p$ とする. v を (13) の解とする。$u_0 \in L^p$ を $\nabla \cdot u_0 = 0$ かつ $u_0 - v \in L^2$ とせよ。このとき, 次の定数 C_1, C_2 が存在する。

$$A(v) \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x||v(x)| < C_1$$

$$|u_0 - v|_2^{2(p-n)/[n(p-2)]} \, |u_0 - v|_p^{p(n-2)/[n(p-2)]} < C_2 (C_1 - A(v))$$

ならば (14) の解は存在する。これは,

$$|u(t)-v|_p \le C_4(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$$

と減衰する。ただし、C_4は、n, p, ν, $A(v)$, $|u_0-v|_2$, $|u_0-v|_p$ に依存する（t に関する）定数である。

$|\ |_p$ は $\mathbb{R}^n$ 上の $L^p(\mathbb{R}^n)$ のノルムを表わす。

1. R.Finn, On the steady state solutions of the Navier-Stokes equations III Acta Math.,105(1961),197-244.

2. R.Finn, On the extrior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. Arch.Rat.Mech.Anal.,19(1965),363-406.

3. R.Finn, Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain, Rocky Mt. J.Math.,3(1973) 107-140.

4. K.I.Babenko, On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluids Mat.Sbornik 91(133)91973),3-26 (English transl. in Math.USSR-Sb.,20(1973),1-25.)

5. K.I.Babenko-M.M.Vasilev, On the asymptotic behavior of viscous fluid at some distance from an immersed body, Prikl.Mat.Mech.,37(1973),690-705 (English transl.in J.Appl.Math.Mech.,37(1973),651-665)

6. D.Clark,The vorticity at infinity for solutions of the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains, Indiana Univ.Math.J.,20(1971),633-651.

7. R.Mizumachi, On the asymptitic behavior of incompressible viscous fluid motions past objects. J.Math Soc.Japan 36(1984),497-522.

8. K.Masuda, On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects. J.Math.Soc.Japan27 (1975),294-327.

9. K. Masuda, Weak solutions of Navier-Stokes equations. Tohoku Math.J.,36(1984),627-646.

10. T.Kato, Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in R^n, with applications to weak solutions. Math.Z.,187(1984),471-480.

11. M.E. Schonbek, L^2-decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Arch.Rat.Mech.Anal.,89 (1985),209-222.

12. R.Kajikiya-T.Miyakawa, On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in R^n. Math.Z.192 (1986), 135-148.

13. G.P.Galdi-P.Maremonti, Monotonic decreasing, and asymptotic behavior of the kinetic energy for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains. Arch.Rat.Mech.Anal.,90(1986),253-266.

14. H.Beirao da Veiga, Existence and asymptotic behavior for strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space. Indiana Univ.Math.J., 36(1987), 149-166.

15. H. Beirao da Veiga-P.Secchi, L^p-stability for the strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space. Arch.Rat.Mech.Anal.98(1987),65-69.